

# 非平衡統計力学における system-size 展開の方法について

清水 敏 寛\*

## On the system-size expansion method in nonequilibrium statistical mechanics

By Toshihiro Shimizu\*

**Synopsis:** The system-size expansion method is reviewed. An extension of the method is given to study the relaxation and fluctuation from unstable and metastable states. The theory is applied to the one-dimensional laser model.

**要旨:** system-size 展開の方法の利点, 適用限界が解説されている。不安定状態及び準安定状態からの緩和・ゆらぎを議論するために, その方法が一般化されている。例題として一次元レーザー模型が用いられている。

### §1. 序

最近, 非平衡系 (特に平衡状態からのずれが大きい場合) の統計力学の研究が盛んに行なわれている。熱平衡あるいは統計力学的平衡状態にある系は, 熱力学及び通常の統計力学で記述されることはよく知られている。非平衡状態の場合でも平衡状態からのずれが小さい場合には, その系を記述する分布関数あるいはその他の物理量を平衡状態での値のまわりで展開し, 一次まで残す (いわゆる線型近似) ことによって系の静的及び動的な振舞いをうまく説明できる。これは線型応答理論 (Kubo 理論)<sup>1)</sup>, 及び線型ランジュバン方程式の方法 (Mori 理論)<sup>2)</sup> としてすでに定式化されている。ところが, 平衡状態からのずれが大きい場合には, 問題の取扱いは大変難しくなる。実際の物理系は非常に複雑で, 種々の物理量を厳密に計算することは不可能である。そこで多くの場合には, その物理量を most dominant な部分で近似しようと試みる。この most dominant な部分を取り出すことは, 現象の特徴を明確にするためにも有益なことである。しかし, 非平衡系の場合には, その most dominant な部分が何であるのかはあまり明らかでない。例えば摂動論を使って議論しようとする時, 第 0 近似として何を選んだらよいのか明らかでない。換言すれば, 非平衡を特徴づける展開パラメータは何かということである。非平衡状態で重要になる他の点としては, ゆらぎの

問題があげられる。熱平衡状態であっても, 相転移温度の近傍ではゆらぎが非常に大きくなり重要となるが, 非平衡の場合にも, このゆらぎが重要な役割を演ずる。

最近この問題に対するアプローチの仕方の一つとして system-size 展開の方法<sup>3-5)</sup> と呼ばれる有効な方法が提案されている。この方法では, 展開パラメータとして系の大きさを表す量  $\Omega$  (例えば, 系の体積  $V$ , 全粒子数  $N$ , 全スピン数  $N'$  等) の逆数  $\epsilon \equiv \Omega^{-1}$  を用いている。実際に我々が観測する系は巨視的なものであるので, 一般に  $\epsilon$  は非常に小さい値をとる。この方法の長所は,  $\epsilon$  は系の詳細に依存しないパラメータであるので, 適用範囲がたいへん広いということである。しかし一方では, 次節で述べる様に, 中心極限定理を仮定しているのので, この定理が成り立たない様な状況では, 適用が不可能となる。そのために, 最近理論の拡張がいくつか試みられている<sup>6-9)</sup>。

この小稿は, system-size 展開の方法, 及びその拡張についての最近の筆者の研究<sup>10-14)</sup> をまとめたものである。まず §2 では, 通常の system-size 展開の方法及びその適用限界が調べられている。§3 ではその方法を拡張する数学的手段として母関数が導入され, そのいくつかの性質が調べられている。§4, §5 では不安定状態及び準安定状態からの緩和, ゆらぎが議論されている。これらの問題は通常の system-size 展開の方法では取り扱いが不可能であった。最後の §6 は, 結果のまとめにあてられている。

\* 物理学教室助教授  
Assistant Professor, Department of Physics

## §2. System-size 展開の方法

Van Kampen<sup>3)</sup> によって提案されたこの方法は、次の2つの仮定に基礎をおいている。(1) 我々が観測する巨視的変数は extensive な性質をもっている。(即ち、系の大きさを2倍、3倍にした時、その変数の値も2倍、3倍となる)。(2) 巨視的な系では、ある種の中心極限定理が成り立つ。この2つの仮定を認めると以下で述べる様に、系の時間発展を most dominant な部分と、そのまわりのゆらぎという形に分離できて、問題をより明確にとらえることができるようになる。

系を特徴づける巨視的変数を  $X$  で表わす。ここでは、簡単のために一変数の場合を考えるが、多変数への拡張は容易である。一般に、複雑な巨視的系においては、変数  $X$  がとりうる値を正確に計算することは不可能で、そのとりうる値の確率分布だけが意味をもつ。今、その確率分布関数を  $P(X, t)$  で表わす。即ち時刻  $t$  で  $X$  が  $X$  と  $X+dX$  の間の値をとる確率が  $P(X, t)dX$  で表わされる。分布関数  $P(X, t)$  は次の様な型のマスター方程式に従うものとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = \int d(\Delta X) \{ P(X - \Delta X, t) W(X - \Delta X, \Delta X) - P(X, t) W(X, \Delta X) \}. \quad (2.1)$$

ここで  $W(X, \Delta X)$  は  $X$  から  $X + \Delta X$  への単位時間当りの遷移確率である。この式は Kramers-Moyal 展開とよばれる次の様な形式に書きかえることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial X} \right)^n C_n(X) P(X, t), \quad (2.2)$$

$$C_n(X) \equiv \int d(\Delta X) (\Delta X)^n W(X, \Delta X).$$

考えている系の大きさ (system-size) を  $\Omega$  で表わす。仮定 (1) より  $X$  は extensive な量だから、intensive な量  $x$  を次式で定義する。

$$x = \frac{X}{\Omega} = \varepsilon X, \quad (\varepsilon = \Omega^{-1}). \quad (2.3)$$

又遷移が局所的に生ずるとすると

$$W(X, \Delta X) = \Omega w(x, \Delta x). \quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) を使って (2.2) を書きかえると

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n c_n(x) \psi(x, t). \quad (2.5)$$

ここで

$$\psi(x, t) = \Omega P(X, t), \quad c_n(x) = \varepsilon C_n(X). \quad (2.6)$$

仮定 (2) は、 $x$  のとりうる値が most dominant な部分を  $y(t)$  で表わすと、そのまわりのゆらぎが非常に小さく  $\varepsilon^{1/2}$  のオーダーのものであるということを意味している。

$$x = y(t) + \varepsilon^{1/2} \xi, \quad (2.7)$$

(2.7) を (2.5) に代入して、両辺の種々の  $\varepsilon$  の巾の係

数を比較して等しいとおく。まず  $\varepsilon^{-1/2}$  の係数より

$$\frac{d y(t)}{dt} = c_1(y(t)) \quad (2.8)$$

が求まる。又その次のオーダーから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\xi, t) = & -\frac{\partial}{\partial \xi} (c_1^{(1)}(y) \xi P(\xi, t)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (c_2(y) P(\xi, t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

が求まる。ここで

$$P(\xi, t) \equiv \Omega^{1/2} \psi(y(t) + \varepsilon^{1/2} \xi, t), \quad c_1^{(1)}(y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} c_1(y). \quad (2.10)$$

従って、変数  $x$  のとりうる値は most dominant な部分は、(2.8) から決まり、そのまわりのゆらぎ (分散) の2乗  $\sigma$  は、(2.9) より次の様に計算できる。

$$\begin{aligned} \sigma(t) \equiv \int d\xi \xi^2 P(\xi, t) \\ \frac{d}{dt} \sigma(t) = 2c_1^{(1)}(y(t)) \sigma(t) + c_2(y(t)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

これらの式をもう少し具体的に理解するために、一次元レーザー模型<sup>4)</sup> と呼ばれる簡単な模型に以上の結果を適用してみよう。この模型では (2.5) の  $c_n(x)$  は次式で与えられる。

$$c_1(x) = x(1-x^2), \quad c_2(x) = 2, \quad c_n(x) = 0, \quad (n \geq 3). \quad (2.12)$$

従ってこの場合には、(2.8) (2.11) は次の様な具体的な形をもつ。

$$\frac{d}{dt} y(t) = y(t)(1-y(t)^2) \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = 2(1-3y(t)^2)\sigma(t) + 2. \quad (2.14)$$

(2.13) の様な非線形方程式を解くと most dominant な部分  $y(x)$  が求まり、それを (2.14) に代入して解くと、そのまわりのゆらぎ  $\sigma(t)$  が求まる。

$c_1(x)$  をグラフで書くと、図1の様になる。

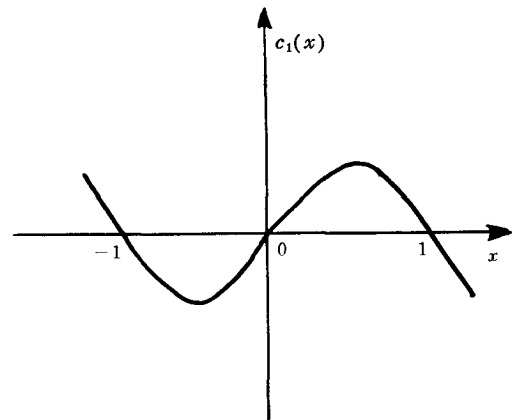


図 1

点  $x = \pm 1$  は安定点で、 $x = 0$  は不安定点であることは次の様にして容易に示すことができる。即ち  $y(t)$  を  $x = +1$  ( $x = -1$  も同様) のまわりで展開し

$$y(t) = 1 + \delta y(t), \quad (2.15)$$

(2.13) に代入し  $\delta y(t)$  について一次まで残すと、

$$\frac{d}{dt} \delta y(t) = -2\delta y(t), \quad \delta y(t) = e^{-2t} \delta y(0) \quad (2.16)$$

となり、 $\delta y(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で 0 に近づく。即ち  $x = 1$  の微小近傍から出発した点はその微小近傍にとどまり、時間がたつと  $x = 1$  にもどることを意味している。従って  $x = 1$  は安定点である。一方  $x = 0$  のまわりで同様の取り扱いをすると、(2.16) 式に対応する式として、

$$\frac{d}{dt} \delta y(t) = \delta y(t), \quad \delta y(t) = e^t \delta y(0), \quad (2.17)$$

を得るが、これは  $t \rightarrow \infty$  で漸次  $\delta y(t)$  は大きくなる。即ち  $x = 0$  の微小近傍から出発した点は  $x = 0$  の近傍にとどまらず  $x = 0$  から離れていくことを示している。 $x = 0$  は不安定点である。丁度  $x = 0$  又は  $x = \pm 1$  から出発した場合 ( $y(0) = 0$  又は  $y(0) = \pm 1$ ) には、その点に居つづける。 $y(t)$  は変化しない。 $(y(t) = 0 \text{ 又は } y(t) = \pm 1)$ 。では、この場合には、 $x = 0$  は不安定点で  $x = \pm 1$  は安定点であることはどの様な点に反映されるのか考えて見よう。結論から言えば、ゆらぎにその違いが現われる。 $x = \pm 1$  から出発した場合には  $y(t) = \pm 1$  を (2.14) に代入すると  $\sigma(t)$  の式は

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = -4\sigma(t) + 2; \quad \sigma(t) = e^{-4t} \left( \sigma(0) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (2.18)$$

となりゆらぎ  $\sigma(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で有限な値  $1/2$  に近づく。一方  $x = 0$  の場合には  $y(t) = 0$  を (2.14) に代入すると

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = 2\sigma(t) + 2, \quad \sigma(t) = e^{2t} (\sigma(0) + 1) - 1 \quad (2.19)$$

となり、 $\sigma(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で非常に大きい値となる。これは  $x = 0$  のまわりのゆらぎが非常に大きくなるので  $x = 0$  の値自身が不確かであることを示している。(2.18) 式では  $\sigma(t)$  が  $1/2$  に近づき、従って (2.7), (2.11) を考慮すると  $x = \pm 1$  のまわりのゆらぎが  $\varepsilon/2$  であることを意味している。 $\varepsilon$  は大体非常に小さい値なので、このゆらぎは非常に小さい。即ち  $x = \pm 1$  の値がたいへん確からしいことを示している。

この例からも明かなように、system-size 展開の方法は、(2.2) の様な複雑なマスター方程式から most dominant な部分は (2.8) そのまわりのゆらぎは (2.11) という簡単でしかも物理的に意味のある式を取り出すことに成功している。

上述の system-size 展開の方法は、確かに系の初期の時間発展はうまく記述しているが、長時間後の振舞いに

ついては必ずしも正しい答えを与えない。これには2つの場合が考えられる。1つは不安定点から出発する場合である。(2.19) から明らかな様に  $\sigma(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で発散するが、これは (2.7) で  $\varepsilon$  が 1 のオーダーであるということと矛盾する。即ちこの場合には仮定 (2) は初期の時刻では成り立つとしても、後の時刻では成り立たなくなる。上述の system-size 展開の方法が使えなくなるもう1つの場合は、安定点の近傍から出発した場合である。例えば  $x = 1$  の近傍から出発した場合、(2.13) (2.14) からそれぞれ  $y(t) = 1$  ( $t \rightarrow \infty$ ),  $\sigma(t) = 1/2$  ( $t \rightarrow \infty$ ) が得られるが、一次元レーザモデルの  $t \rightarrow \infty$  での正しい値は  $y(t) = 0$  ( $t \rightarrow \infty$ )  $\sigma(t) = \varepsilon^{-1} + 0(1)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) である。これらの値は次の様にして求められる。(2.12) をマスター方程式 (2.5) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} (c_1(x) \psi(x, t)) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \\ &\equiv L \psi(x, t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

平衡状態での分布関数  $\psi_s(x)$  は、左辺を 0 とおいて求め、

$$\psi_s(x) = \exp \left( -\frac{F(x)}{\varepsilon} \right) / \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{F(x)}{\varepsilon} \right) dx. \quad (2.21)$$

ここで  $F(x)$  は自由エネルギーで

$$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \quad (2.22)$$

で与えられる。(2.21) より 平均値及び分散を求めると

$$\left. \begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \psi_s(x) dx = 0, \\ \langle x^2 \rangle &= \varepsilon \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi_s(x) dx = 1 + 0(\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

この場合にも仮定 (2) が成り立っていないことを示している。即ちゆらぎは  $\varepsilon$  のオーダーではなくなる。 $F(x)$  をグラフに表わすと図 2 の様になるが、このグラ

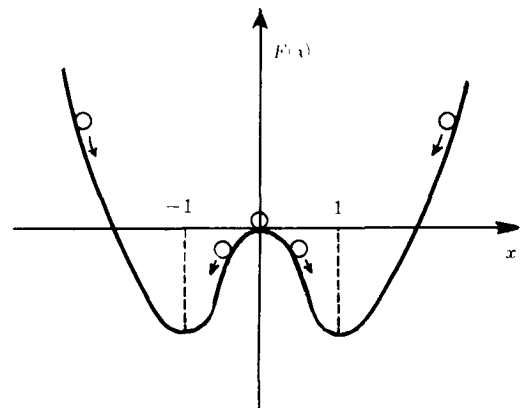


図 2

フから  $x=0$  は不安定点で  $x=\pm 1$  は安定点であることは明らかである。 $x<0$  の領域から出発した点は  $x=-1$  に、 $x>0$  の領域から出発した点は  $x=+1$  に近づく。丁度  $x=0$  の上から出発した場合には、 $x=0$  に居つづけるが、ゆらぎが非常に大きくなり、 $x=0$  が不安定点であることを示している。以下の節では、これらの問題を取り扱うためには、従来の system-size 展開の方法をどの様に拡張したらよいかを考える。

### §3. モーメントについての方程式と母関数

この節でも前節で論じられた一次元レーザー模型を用いて議論を進める。この模型のマスター方程式は(2.20)で与えられるが、この式から以下で定義される  $x$  に関する most dominant な値  $y(t)$  とそのまわりのモーメント  $M_n(t)$  についての情報を取り出したいわけである。

$$\left. \begin{aligned} y(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x \psi(x, t) dx, \\ M_n(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - y(t))^n \psi(x, t) dx. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

通常の system-size 展開の方法では、中心極限定理が常に成り立っているという仮定(仮定(2))から  $M_n(t)$  は  $\varepsilon^{n/2}$  のオーダーであることが仮定されている。しかしながら前節で調べられた様に、この仮定は初期の時刻では正しいとしても、時間がたつと成立しなくなる場合がある。それ故モーメントの大きさが時間的にどの様に変化するかを調べる必要がある。その為には、次の様な母関数を導入すると便利である<sup>10)</sup>。

$$G(\alpha, \beta; t) \equiv \delta(y(t) - \alpha) \prod_{n=2}^{\infty} \delta(M_n(t) - \beta_n), \quad (\beta = (\beta_2, \beta_3, \dots)). \quad (3.2)$$

(2.20) と (3.1) より  $G(\alpha, \beta; t)$  は次式に従うことがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\alpha, \beta; t) = \mathcal{L} G(\alpha, \beta; t). \quad (3.3)$$

ここで  $\mathcal{L}$  は  $\alpha, \beta$  に関する微分演算子である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} G(\alpha, \beta; t) &\equiv -\frac{\partial}{\partial \alpha} (v_1(\alpha, \beta) G) \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_n} (v_n(\alpha, \beta) G), \\ v_1(\alpha, \beta) &\equiv \sum_{m=0}^3 \frac{1}{m!} c_1^{(m)}(\alpha) \beta_m \\ v_n(\alpha, \beta) &\equiv \sum_{m=1}^3 \frac{n}{m!} c_1^{(m)}(\alpha) \beta_{n-1+m} \\ &\quad + \varepsilon n(n-1) \beta_{n-2} - n \beta_{n-1} \sum_{m=2}^3 \frac{c_1^{(m)}(\alpha)}{m!} \beta_m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(\beta_0=1, \beta_1=0, c_1^{(m)}(\alpha) \equiv \partial^m c_1(\alpha) / \partial \alpha^m)$$

ある任意の時刻  $t_0$  での  $G(\alpha, \beta; t_0)$  が与えられると、その後の任意の時刻  $t$  での  $G(\alpha, \beta; t)$  は、(3.3) から次の様に与えられる。

$$G(\alpha, \beta; t) = \exp\{\mathcal{L}(t-t_0)\} G(\alpha, \beta; t_0) \quad (t \geq t_0) \quad (3.5)$$

又便利のために、次式で定義された  $\mathcal{L}$  の共役演算子  $\mathcal{D}$  を導入する。

$$\int d\alpha d\beta f(\alpha, \beta) \mathcal{L} g(\alpha, \beta) \equiv \int d\alpha d\beta (\mathcal{D} f(\alpha, \beta)) g(\alpha, \beta). \quad (3.6)$$

$\mathcal{D}$  の explicit な形は、(3.4) から

$$\mathcal{D} = v_1(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} v_n(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \beta_n}. \quad (3.7)$$

(3.2), (3.5), (3.7) を用いると  $y(t)$  と  $M_n(t)$  は次の様に表わせる。

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int d\alpha d\beta \alpha e^{\mathcal{L}(t-t_0)} G(\alpha, \beta; t_0) \\ &= \int d\alpha d\beta (e^{\mathcal{D}(t-t_0)} \alpha) G(\alpha, \beta; t_0), \\ M_n(t) &= \int d\alpha d\beta \beta_n e^{\mathcal{L}(t-t_0)} G(\alpha, \beta; t_0) \\ &= \int d\alpha d\beta (e^{\mathcal{D}(t-t_0)} \beta_n) G(\alpha, \beta; t_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

これらの式は、モーメントのオーダーを評価する時に、非常に便利であることが §4 で示される。(3.8) は、モーメント  $y(t), M_n(t)$  を  $G(\alpha, \beta; t)$  を用いて表わしたものであるが、同様な方法で分布関数  $\psi(x, t)$  自身も  $G(\alpha, \beta; t)$  を用いて表わすことができる。

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int d\alpha d\beta F(\alpha, \beta; x) e^{\mathcal{L}(t-t_0)} G(\alpha, \beta; t_0) \\ &= \int d\alpha d\beta (e^{\mathcal{D}(t-t_0)} F(\alpha, \beta; x)) G(\alpha, \beta; t_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで

$$F(\alpha, \beta; x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \beta_n. \quad (3.10)$$

(3.9) は分布関数の形の時間的変化を議論する時に便利であり、準安定状態からの緩和を議論する §5 で用いられる。

ここでは、詳細は省くが、(3.3) から射影演算子の方法を用いると  $y(t)$  と  $M_2(t)$  についての非線型の閉じた方程式が得られることを注意しておく。<sup>11)</sup>これらの式は、(2.13), (2.14) を一般化したものになっていて、問題によっては、より便利なものである。

### §4. 不安定状態からの緩和とゆらぎ

§2 で議論した様に一次元レーザー模型では、 $x=0$  は不安定点で  $x=\pm 1$  は安定点である。この節では、初期分布が丁度  $x=0$  から出発する場合を考える。即ち初期時刻  $t=0$  での分布関数  $\psi(x, 0)$  は  $x=0$  のまわりで幅  $\varepsilon \sigma_0$  をもったガウス分布で表わせるものとする。

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sigma_0}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon\sigma_0}\right\}. \quad (4.1)$$

この場合には、系の対称性と初期条件 (4.1) から一次のモーメント  $y(t)$  は0のまま変化しない。又奇数次のモーメント  $M_{2n+1}(t)$  は常に0である。そこで以下では偶数次のモーメント  $M_{2n}(t)$  だけを考えることにする。その時、(3.7) で定義された演算子  $\mathcal{D}$  は簡単に

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(\beta_{2n} - \beta_{2(n+1)} + (2n-1)\beta_{2(n-1)}) \frac{\partial}{\partial \beta_{2n}} \quad (4.2)$$

と与えられる。初期分布 (4.1) より初期のモーメント  $M_{2n}(0)$  は次の様に計算できる。

$$M_{2n}(0) = \varepsilon^n \sigma_0^n m_{2n}, \quad m_{2n} = (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1. \quad (4.3)$$

(3.8) で  $t_0=0$  とすると、任意の時刻  $t$  でのモーメント  $M_{2n}(t)$  は次の様に表わせる。

$$M_{2n}(t) = \int d\beta (e^{\mathcal{D}t} \beta_{2n}) G(\beta; 0). \quad (4.4)$$

ここで

$$G(\beta; 0) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \delta(M_{2n}(0) - \beta_{2n}), \quad \beta = (\beta_2, \beta_4, \dots) \quad (4.5)$$

まず、 $t$  があまり大きくない場合の  $M_{2n}(t)$  の dominant な部分を調べる。小さなパラメータ  $\varepsilon$  は  $\mathcal{D}$  の中と  $G(\beta; 0)$  の中に入っているの、 $\beta_{2n}$  を次の様にスケールする。

$$\zeta_{2n} = \beta_{2n} (\sigma_0 \varepsilon)^{-n}. \quad (4.6)$$

その時  $\mathcal{D}$  と  $M_{2n}(t)$  は次の様に書きなおされる。

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left\{ \zeta_{2n} - \varepsilon \sigma_0 \zeta_{2(n+1)} + \frac{1}{\sigma_0} (2n-1) \zeta_{2(n-1)} \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta_{2n}}, \quad (4.7)$$

$$M_{2n}(t) = \varepsilon^n \int d\zeta (e^{\mathcal{D}t} \zeta_{2n}) G_I(\zeta; 0), \quad (4.8)$$

$$G_I(\zeta; 0) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \delta(m_{2n} - \zeta_{2n}). \quad (4.9)$$

$\varepsilon t \ll 1$  を満たす時間領域では (4.7) で  $\varepsilon$  を含んだ項は (4.8) の計算をする時に無視できる。従ってこの時間領域内での  $M_{2n}(t)$  の dominant な部分は、

$$M_{2n}^I(t) = \varepsilon^n \int d\zeta (e^{\mathcal{D}t} \zeta_{2n}) G_I(\zeta; 0) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (0 \leq t \leq t_I) \quad (4.10)$$

ここで  $\mathcal{D}_I$  は、 $\mathcal{D}$  の effective な部分で

$$\mathcal{D}_I = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left( \zeta_{2n} + \frac{1}{\sigma_0} (2n-1) \zeta_{2(n-1)} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_{2n}}. \quad (4.11)$$

(4.10) は通常の system-size 展開の方法の結果 (2.19) と一致することは容易にわかる。即ち

$$M_{2n}^I(t) = m_{2n} \varepsilon^n \{e^{2t}(\sigma_0 + 1) - 1\}^n. \quad (4.12)$$

これは、時間領域  $\varepsilon \ll 1$  では通常の system-size 展開の方法が正しいことを示している。しかし、(4.12) は  $\varepsilon$  が非常に小さい値であるとしても  $t \rightarrow \infty$  で発散する。§2

で述べた様に、モーメントは高々1のオーダーであるので、この発散は正しくない。この発散は  $M_{2n}(t)$  が常に  $\varepsilon^n$  のオーダーであるという正しくない仮定と密接に関係している。(4.12) から時刻  $t \sim (-\ln \varepsilon)/4$  では  $M_{2n}(t)$  は  $\varepsilon^{n/2}$  のオーダーになることがわかる。即ちこの時刻では、仮定 (2) は正しくなる。そこで (4.10) が成り立つ時間領域をもう少し詳しく調べることにする。まず (4.10) が時刻  $t=t_I$  まで正しいと仮定しよう。 $t_I$  より後の時刻  $t$  での  $M_{2n}(t)$  は、(3.8) より次の様に表わせる。

$$M_{2n}(t) = \int d\beta G_{II}(\beta; t_I) e^{\mathcal{D}(t-t_I)} \beta_{2n}. \quad (4.13)$$

ここで

$$G(\beta; t_I) \equiv \exp(\mathcal{D}_I t_I) G(\beta; 0) = \prod_{n=1}^{\infty} \delta(M_{2n}^I(t_I) - \beta_{2n}). \quad (4.14)$$

次に今度は  $t_I$  を初期時刻と見なして、(4.7), (4.8) におけるのと同じ手続きを繰り返す。しかし今度は  $\beta_{2n}$  を次の様にスケールすると

$$\eta_{2n} = \beta_{2n} \sigma_I^{-n}, \quad (\sigma_I \equiv \varepsilon \{e^{2t_I}(\sigma_0 + 1) - 1\}). \quad (4.15)$$

演算子  $\mathcal{D}$  は次の様に書ける。

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left\{ \eta_{2n} - \sigma_I \eta_{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{\sigma_I} (2n-1) \eta_{2(n-1)} \right\} \frac{\partial}{\partial \eta_{2n}}. \quad (4.16)$$

この式と (4.7) を比較すると、 $t_I$  は次の条件から決定されることがわかる。

$$\sigma_I \simeq \varepsilon \sigma_I^{-1} \text{ i.e., } \sigma_I \simeq \sqrt{\varepsilon} \longrightarrow t_I \sim (-\ln \varepsilon)/4. \quad (4.17)$$

従って時間領域  $t \geq t_I$  での  $\mathcal{D}$  の effective な部分は

$$\mathcal{D}_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \eta_{2n} \frac{\partial}{\partial \eta_{2n}} \quad (4.18)$$

で  $M_{2n}(t)$  の dominant な部分は、

$$M_{2n}^{II}(t) = \sigma_I^n \int d\eta G_{II}(\eta; t_I) e^{\mathcal{D}_{II}(t-t_I)} \eta_{2n} = m_{2n} \sigma_I^n e^{2n(t-t_I)} \quad (t_I \leq t \leq t_{II}) \quad (4.19)$$

ここで

$$G_{II}(\eta; t_I) = \prod_{n=1}^{\infty} \delta(m_{2n} - \eta_{2n}). \quad (4.20)$$

(4.19) も  $t \rightarrow \infty$  で発散する。上と同様な手続きを  $M_{2n}(t)$  が  $t \rightarrow \infty$  で正しい値に近づくまで繰り返すと、次の様な結果が得られる。(4.19) は時刻  $t_{II} \sim (-\ln \varepsilon)/2$  まで正しく、 $t_{II}$  以後では、 $M_{2n}(t)$  の dominant な部分は次の様に計算できる。

$$M_{2n}^{III}(t) = \sigma_{II}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[ \frac{x^2 e^{2(t-t_{II})}}{\sigma_{II} x^2 (e^{2(t-t_{II})} - 1) + 1} \right]^n dt \quad (t \geq t_{II}) \quad (4.21)$$

( $\sigma_{II} = \sigma_I e^{2(t_{II}-t_I)}$ )  
これは  $t \rightarrow \infty$  で正しい定常値1に近づく。この様に不安定点からの緩和とゆらぎは  $0 \leq t \leq t_I$  では  $M_{2n}^I(t)$  で  $t_I \leq$

$t \leq t_{II}$  では  $M_{2n}^{II}(t)$  で又  $t \geq t_{II}$  では  $M_{2n}^{III}(t)$  でうまく記述されることがわかる。(4.21) は他の方法<sup>5)</sup> で得られた結果と  $t \gg 1$  で一致する。

### §5. 準安定状態からの緩和過程

一次元レーザーモデルでは点  $x = \pm 1$  は安定点である。もし系が  $x=1$  (又は  $x=-1$ ) から出発した時、どのような時間発展をするのだろうか。通常の system-size 展開の方法では  $x=1$  (又は  $x=-1$ ) から出発した場合には、系はそのまま居つづけるという結果を与えるが、この結果が正しくないことは §2 で示した。この節ではこの問題を §4 と同じ方法で取り扱い正しい結果が得られることを示す。

初期分布は安定点  $x = -1$  のまわりのガウス分布で与えられるとする。

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma_0}} \exp\left\{-\frac{(x+1)^2}{2\epsilon\sigma_0}\right\}, \quad (5.1)$$

従って初期モーメントは

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= -1, \\ M_{2n}(0) &= \epsilon^n \sigma_0^n m_{2n}, \quad M_{2n+1}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

この場合には (3.8) よりも (3.9) を用いる方が便利である。§4 と同じように、まず短い時間における分布関数の振舞いを調らべる。(3.9) でスケール変換

$$\zeta_n = \epsilon^{-n/2} \beta_n \quad (n=2, 3, \dots) \quad (5.3)$$

を導入すると

$$\psi(x, t) = \int d\alpha d\zeta (e^{\tilde{\mathcal{Q}}t} \tilde{F}(\alpha, \zeta; x)) \tilde{G}(\alpha, \zeta; 0), \quad (5.4)$$

ここで

$$\tilde{F}(\alpha, \zeta; x) \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-\alpha)/\sqrt{\epsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \zeta_n. \quad (5.5)$$

演算子  $\tilde{\mathcal{Q}}$  は  $\epsilon$  で次の様に展開される。

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{Q}}_0 + \epsilon^{1/2} \tilde{\mathcal{Q}}_1 + \epsilon \tilde{\mathcal{Q}}_2 + \epsilon^{3/2} \tilde{\mathcal{Q}}_3, \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}}_0 &= c_1(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} (n c_1^{(1)}(\alpha) \zeta_n \\ &\quad + n(n-1) \zeta_{n-2}) \frac{\partial}{\partial \zeta_n}, \\ \tilde{\mathcal{Q}}_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} n \left( -\frac{1}{2} c_1^{(2)}(\alpha) \zeta_{n+1} \right. \\ &\quad \left. - \zeta_{n-1} \frac{1}{2} c_1^{(2)}(\alpha) \zeta_2 \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_n}, \\ \tilde{\mathcal{Q}}_2 &= \frac{1}{2} c_1^{(2)}(\alpha) \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{6} c_1^{(3)}(\alpha) (\zeta_{n+2} - \zeta_{n-1} \zeta_3) \frac{\partial}{\partial \zeta_n}, \\ \tilde{\mathcal{Q}}_3 &= \frac{1}{6} c_1^{(3)}(\alpha) \zeta_3 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

(5.4) で速い時間過程とゆっくりした時間過程を分けるために、次の様な相互作用表示をとる。

$$\exp(\tilde{\mathcal{Q}}t) \tilde{F}(\alpha, \zeta; x) = \exp(\tilde{\mathcal{Q}}_0 t) \tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t) \quad (5.8)$$

$\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t)$  は次式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t) = \epsilon^{1/2} e^{-\tilde{\mathcal{Q}}_0 t} \tilde{\mathcal{Q}}' e^{\tilde{\mathcal{Q}}_0 t} \tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t) \quad (5.9)$$

$$(\tilde{\mathcal{Q}}' \equiv \tilde{\mathcal{Q}}_1 + \epsilon^{1/2} \tilde{\mathcal{Q}}_2 + \epsilon \tilde{\mathcal{Q}}_3)$$

(5.8) を (5.4) に代入すると

$$\psi(x, t) = \int d\alpha d\zeta \tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t) e^{\tilde{\mathcal{Q}}_0 t} \tilde{G}(\alpha, \zeta; 0) \quad (5.10)$$

ここで  $\tilde{\mathcal{Q}}_0$  は  $\tilde{\mathcal{Q}}$  の共役演算子である。 $t\epsilon^{1/2} \ll 1$  を満す時間領域では、 $\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t)$  の時間依存性を無視することができるので、 $\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t) \simeq \tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; 0) = \tilde{F}(\alpha, \zeta; x)$ 、従って

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int d\alpha d\zeta \tilde{F}(\alpha, \zeta; x) e^{\tilde{\mathcal{Q}}_0 t} \tilde{G}(\alpha, \zeta; 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma(t)}} \exp\left\{-\frac{(x+1)^2}{2\epsilon\sigma(t)}\right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\left( \sigma(t) \equiv \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-4t} + \frac{1}{2} \right)$$

分布関数 (5.11) は初期の時間発展を正しく記述する。しかし、 $t\epsilon^{1/2} > 1$  を満す様な時間領域では、(5.10) で  $\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t)$  の時間依存性が無視できなくなるので、(5.11) は正しくなくなる。 $\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t)$  の時間依存性を取り入れるためには2つの方法が考えられる。1つは (5.9) を正直に解くことである。他方は、(5.9) を直接解かない次の様な方法である。

まず時刻  $t$  での  $\psi(x, t)$  が即知であるとしよう。その後の時刻  $(t + \Delta t)$  での分布関数  $\psi(x, t + \Delta t)$  は次の様に表わせる。

$$\psi(x, t + \Delta t) = e^{L\Delta t} \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \psi(\lambda, t) \psi(x, \lambda; \Delta t) \quad (5.12)$$

ここで  $L$  はマスター方程式 (2.20) に現われる演算子である。(5.4) と同様に (5.12) を母関数を用いて表わすと、

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \psi(\lambda, t) \times \\ &\quad \times \int d\alpha d\beta (e^{\mathcal{Q}\Delta t} F(\alpha, \beta; x)) \tilde{G}_I(\alpha, \beta; 0) \end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで

$$G_\lambda(\alpha, \beta; 0) \equiv \delta(\alpha - \lambda) \prod_{n=2}^{\infty} \delta(\beta_n), \quad \beta = (\beta_2, \beta_3, \dots) \quad (5.14)$$

スケール変換  $\zeta_n = \epsilon^{-n/2} \beta_n$  を導入し、 $\tilde{F}_I(\alpha, \zeta; x; t)$  の時間依存性を (5.11) の様に無視すれば、時間領域  $\Delta t\epsilon^{1/2} \ll 1$  で (5.13) は次の様に書ける。

$$\psi(x, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \psi(\lambda, t) \times$$

$$\times \int d\alpha d\zeta \tilde{F}(\alpha, \zeta; x) e^{\mathcal{L}_0 \alpha} \tilde{G}_1(\alpha, \zeta; 0) \quad (5.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(\lambda, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon\sigma(\lambda, t)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(x-y(\lambda, t))^2}{2\epsilon\sigma(\lambda, t)}\right\} \quad (5.16)$$

ここで  $y(\lambda, t)$  と  $\sigma(\lambda, t)$  は次式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(\lambda, t) &= c_1(y(\lambda, t)) \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma(\lambda, t) &= 2c_1^{(1)}(y(\lambda, t))\sigma(\lambda, t) + 2, \\ y(\lambda, 0) &= \lambda, \sigma(\lambda, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

$c_1(\lambda)$  は (2.12) で与えられる。(5.17) の解は次式で与えられる。

$$y(\lambda, t) = \lambda \{\lambda^2 - (\lambda^2 - 1)e^{-2t}\}^{-1/2} \quad (5.18)$$

$$\sigma(\lambda, t) = \frac{2}{(\lambda^2 - (\lambda^2 - 1)e^{-2t})^3} \left\{ \frac{\lambda^6}{4} (1 - e^{-4t}) \right. \\ \left. - \frac{3\lambda^4(\lambda^2 - 1)}{2} (e^{-2t} - e^{-4t}) \right. \\ \left. + 3\lambda^2(\lambda^2 - 1)^2 t e^{-4t} - \frac{(\lambda^2 - 1)^3}{2} (e^{-4t} - e^{-6t}) \right\}. \quad (5.19)$$

$\psi(\lambda, t)$  は  $\lambda=0$  の近傍で非常に小さく無視できるとすると、時間領域  $4t > \frac{1}{2}$  で  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ) の時  $y(\lambda, 4t) \simeq -1$  ( $+1$ ),  $\sigma(\lambda, 4t) \simeq \frac{1}{2}$  ( $\lambda \neq 0$ ), それ故分布関数  $\psi(x, t+4t)$  は次の様な簡単な形で表わせる。

$$\psi(x, t+4t) = a_+(t)\psi_+(x) + a_-(t)\psi_-(x) \cdot \\ \left( \epsilon^{-1/2} \gg 4t > \frac{1}{2} \right). \quad (5.20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\pm}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left\{-\frac{(x \mp 1)^2}{\epsilon}\right\}, \\ a_+(t) &= \int_0^{\infty} d\lambda \psi(\lambda, t), \quad a_-(t) = \int_{-\infty}^0 d\lambda \psi(\lambda, t). \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

(5.20) を  $x$  について 0 から  $\infty$  又は  $-\infty$  から 0 まで積分すると  $a_{\pm}(t+4t) \simeq a_{\pm}(t)$  を示すことができる。(5.20) で  $t$  は任意だから結局最後に次式を得る。

$$\psi(x, t) = a_+(t)\psi_+(x) + a_-(t)\psi_-(x) \quad (5.22)$$

$a_{\pm}(t)$  の時間依存性は、(5.22) をマスター方程式(2.20)に代入して得られる。

$$\frac{d}{dt} a_{\pm}(t) = -\tau^{-1} \left( a_{\pm}(t) - \frac{1}{2} \right), \quad a_+(t) + a_-(t) = 1. \quad (5.23)$$

緩和時間  $t$  は次式で与えられる。

$$\tau^{-1} = 2\sqrt{\epsilon} \psi_s(0) \quad (5.24)$$

$\psi_s(0)$  は、(2.21) で与えられる。(5.22) は  $t \rightarrow \infty$  で  $\frac{1}{2}(\psi_+(x) + \psi_-(x))$  に近づくが、これは正確な定常分布(2.21)を  $\epsilon$  が小さい時、うまく近似している。

以上の様に、準安定状態からの緩和も、§4 と同じ様な

手続きで説明されることが明らかとなった。

## 6. ま と め

この小稿では、通常の system-size 展開の方法の利点、適用限界を解説し、又その方法の一般化を議論した。まずモーメントあるいは分布関数自身を母関数  $G(\alpha, \beta; t)$  を用いて表わした。この表示はモーメントのオーダーの評価や分布関数の形を調らべるうえで便利であることが示された。次に演算子  $\mathcal{D}$  又は  $\mathcal{L}$  の effective な部分が  $\beta$  をスケールすることにより調らべられた。その結果、モーメント又は分布関数の dominant な部分を得ることができた。これらの結果を用いて、一次元レーザー模型を例にとり、不安定状態及び準安定状態からの緩和とゆらぎを議論した。

不安定点からの緩和、ゆらぎの問題の具体的な例としては、合金における mode selection の問題<sup>16-22)</sup>、レーザー系、生物系における種の選択等の問題があげられるが、これらの問題に、この小稿で述べた方法を適用することは可能であり、次の課題として残されている。

(昭和52年9月27日 受理)

## 参 考 文 献

- 1) R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957) 570.
- 2) H. Mori, Prog. theor. Phys. **33** (1965) 423.
- 3) N. G. van Kampen, Fluctuation Phenomena in Solids, R. E. Burgess ed. (Academic Press, New York, 1965).
- 4) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.
- 5) K. Tomita and H. Tomita, Prog. theor. Phys. **51** (1974) 1731.
- 6) J. S. Langer, M. Bar-on and H. D. Miller, Phys. Rev. **A11** (1975) 1417.
- 7) Y. Saito, J. Phys. Soc. Japan **41** (1976) 388 and 1129.
- 8) H. Tomita, A. Ito and H. Kidachi, Prog. theor. Phys. **56** (1976) 786.
- 9) M. Suzuki, J. Stat. Phys. **16** (1977) 11 and references cited therein.
- 10) T. Shimizu, Physica **83A** (1976) 486, **85A** (1976) 147.
- 11) T. Shimizu, Phys. Letters **57A** (1976) 13.
- 12) T. Shimizu, Phys. Letters **59A** (1976) 175.
- 13) T. Shimizu, Phys. Letters **61A** (1977) 367.
- 14) T. Shimizu, submitted to Physica A.
- 15) M. Suzuki, Prog. theor. Phys. **56** (1976) 77.
- 16) H. Tomita, Prog. theor. Phys. **57** (1977) 1547.
- 17) K. Binder, Z. Physik **267** (1974) 313.
- 18) A. B. Bortz, M. H. Kalos, J. L. Lebowitz and M. A. Zendej, Phys. Rev. **B10** (1974) 535.
- 19) J. Marro, A. B. Bortz, M. H. Kalos and J. L. Lebowitz, Phys. Rev. **B12** (1975) 2000.
- 20) J. S. Langer and M. Bar-on, Ann. of Phys. **78** (1973) 421.
- 21) K. Binder and D. Stauffer, Phys. Rev. Letters **33** (1974) 1006.
- 22) K. Kawasaki, Prog. theor. Phys. **57** (1977) 826.